Grado M+I
Curso 2015-2016

Cálculo I

Matemática Aplicada
ETSII-UPM

Conjuntos numéricos - Entrega 4

Sucesiones: regla del sandwich y recurrentes

APELLIDOS:
NOMBRE:

Ejercicio 1. Calcula el límite dado siguiendo los pasos que se indican. Nota:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2-2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n^2-n}}\right)$$

1. ¿Qué sumando es el mayor? Sustituye todos los sumandos por ese término para encontrar una cota una sucesión mayorante y calcula su límite.

2. ¿Qué sumando es el menor? Sustituye todos los sumandos por ese término para encontrar una cota una sucesión minorante y calcula su límite.

3. ¿Son iguales los dos límites anteriores? ¿se puede asegurar que la sucesión dada tiene límite?

Ejercicio 2. Dada la sucesión $a_n = \dfrac{1}{1+n}+\dfrac{1}{2+n}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}$, $n\in\mathbb{N}$, prueba que existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, y que se cumple que $L\in[\frac{1}{2},1]$, siguiendo los pasos que se indican. Nota:

1. ¿Qué sumando es el mayor? Sustituye todos los sumandos por ese término para encontrar una cota una sucesión mayorante y calcula su límite.

2. ¿Qué sumando es el menor? Sustituye todos los sumandos por ese término para encontrar una cota una sucesión minorante y calcula su límite.

3. ¿Son iguales los dos límites anteriores? ¿se puede asegurar que la sucesión dada tiene límite?

4. Demuestra que tiene límite. (Observación: ya has probado que es acotada, si demuestras que es monótona se sabe que tiene límite)

Ejercicio 3. Estudia la convergencia y calcula el límite de la siguiente sucesión recurrente, siguiendo los pasos que se indican.

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \sqrt{4 + 3a_n}, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Nota:

1. Suponiendo que la sucesión tiene límite L, calcula los posibles valores de L.

2. Teniendo en cuenta los términos de la sucesión, ¿puedes descartar alguno de los valores dos anteriores?,¿cuál sería el límite?

3. Demuestra que tiene límite.

   3.1. Demuestra por inducción que $\{a_n\}$ es monótona (creciente o decreciente).

   3.2. Demuestra por inducción que $a_n \leq L$ o que $a_n \geq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (respectivamente para creciente o decreciente).

Ejercicio 4. Cuestiones teóricas. Decide si las siguientes proposiciones son ciertas. Razona la respuesta si es verdadera o busca un contraejemplo si no lo es.

i) Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$. ☐ Si ☐ No

ii) Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, es una indeterminación. ☐ Si ☐ No

iii) Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que $a_n^2 \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ☐ Si ☐ No

iv) Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que $-1 \leq a_n \leq \frac{1-n^2}{n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$

v) Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones convergentes tales que $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ ☐ Si ☐ No

vi) Sea $a_n = (2r)^n$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ☐ Si ☐ No

vii) Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que existe $0 < a < 1$ tal que $\left(\frac{a}{2}\right)^n \leq a_n \leq a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$